ESCOLA MADAN
Prova de Bolsão - ITA

Instruções para a realização da Prova de Bolsão da Turma ITA da Escola MADAN.

1. Esta prova de admissão tem duração total de 2h.

2. É permitido o uso **apenas** de lápis (ou lapiseira), caneta e borracha. **É proibido qualquer outro material escolar.**

3. A Prova de Bolsão é composta por **25 questões de múltipla escolha** (numeradas de 01 a 25), sendo todas de **Matemática**.

4. Verifique se este caderno de questões está completo.

5. Cada questão admite **uma única** resposta.

6. Antes do final da prova, você receberá uma folha de gabarito para a transcrição das respostas. Usando **caneta azul ou preta**, assinale a opção correspondente à resposta de cada uma das questões de múltipla escolha. **Não esqueça de colocar seu nome, telefone e a turma pretendida na folha de gabarito.**

7. Cuidado para não errar no preenchimento da folha de gabarito. Se isso correr, avise o fiscal, que lhe fornecerá somente mais uma folha extra.

8. **Não haverá tempo suplementar para o preenchimento da folha de gabarito**.

9. A **não devolução** da folha de gabarito e do caderno de questões implicará na **desclassificação do candidato**.

10. **Os alunos não estão autorizados a levar o caderno de questões.**

11. **Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminá-la, avise o fiscal e aguarde-o no seu lugar**.

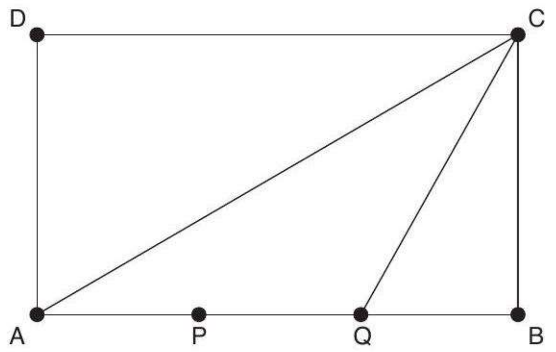
12. Até o dia 05/12/2023, será disponibilizada, no site do MADAN (www.madan.com.br), a classificação com os respectivos percentuais de desconto.

13. Preencher os dados abaixo com letra de forma.

Aluno:	**CPF:**
E-mail:	**Telefone:**
Número de inscrição:	**Turma pretendida:**
Responsável:	

Questão 01

Na figura a seguir, o retângulo ABCD representa uma sala de aula com área igual a $3\sqrt{3}$ m². Um retroprojetor instalado no vértice C projeta um slide sobre a parede AB, cujos pontos P e Q a dividem em três partes iguais, de modo que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = 1m$.



A medida do ângulo $< ACQ$ vale

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 50° (E) 60°

Questão 02

A senha do cartão bancário de Bruna é o menor múltiplo de 7 com 4 algarismos e que deixa resto 1 ao ser dividido por qualquer número do conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. O produto entre o maior e o menor algarismo da senha de Bruna é igual a

(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2 (E) 0

Questão 03

Os polinômios simétricos são estruturas algébricas que permitem estudar as relações entre as soluções de equações com graus bastante elevados. Muitos matemáticos dos séculos XVII e XVIII dedicaram parte de seu trabalho a esse tipo de polinômio com duas ou mais variáveis que podem ser trocadas umas pelas outras sem alterar o valor do polinômio, como $x^2 - xy + y^2$.

Nesse exemplo, nota-se que, se os números de x e y forem trocados um pelo outro, o valor do polinômio continua o mesmo. Isaac Newton estudou particularmente os polinômios simétricos da forma $S = x^n + y^n$ em que n é um número inteiro positivo, denominado grau do polinômio. Newton percebeu que, ao conhecer os valores de S em dois graus diferentes, é possível encontrar valores de S para outros graus, sem a necessidade de descobrir quanto vale x e y. Por exemplo, ao saber os valores de $x^2 + y^2$ e $x^4 + y^4$ os valores de $x^1 + y^1$ e $x^3 + y^3$ também podem ser determinados. Nesse sentido, considere os números reais de sinais contrários x e y, tais que:

$$x^2 + y^2 = 15$$
$$x^4 + y^4 = 153$$

Determine o valor de $\frac{x^3+y^3}{x+y}$.

(A) 3 (B) 9 (C) 10 (D) 21 (E) 27

Questão 04

Um cientista da computação propõe processos aritméticos alternativos para analisar O desempenho de processadores. Em um dos casos analisados, ele determinou que, em uma operação matemática indicada por +, o resultado é o maior dos algarismos operados e que, em uma operação indicada por ×, o resultado é o menor dos algarismos operados, conforme os exemplos a seguir.

$$\begin{array}{r} 7 \\ +8 \\ \hline 8 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7 \\ \times 8 \\ \hline 7 \end{array}$$

Essa determinação é válida para os algarismos de cada posição. Além disso, considera-se a propriedade distributiva da operação como se fosse a da aritmética tradicional. Os exemplos a seguir ilustram tais aspectos.

$$\begin{array}{r} 32 \\ +14 \\ \hline 34 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 52 \\ \times 16 \\ \hline 52 \\ 11+ \\ \hline 152 \end{array}$$

De acordo com esse processo aritmético alternativo, a operação 152 × 34 é igual a

(A) 1122 (B) 1234 (C) 1342

(D) 3434 (E) 5432

Questão 05
Em uma determinada cidade, há apenas dois tipos de pessoa: as que sempre mentem e as que sempre falam a verdade. Um visitante (que não fala a língua local) contratou um tradutor nativo e, em certo momento, perguntou a uma terceira pessoa se ela falava a verdade, e ela respondeu na sua língua local. O tradutor então disse: "ele respondeu que sim, mas pertence ao grupo dos mentirosos". Considerando as informações apresentadas,

(A) o tradutor falou a verdade.

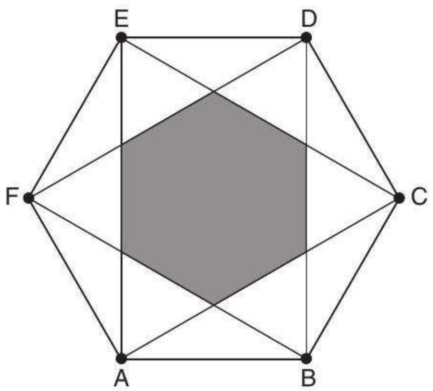
(B) resposta ao visitante é verdadeira.

(C) terceira pessoa e o tradutor falam a verdade.

(D) terceira pessoa e o tradutor mentem.

(E) nada se pode concluir.

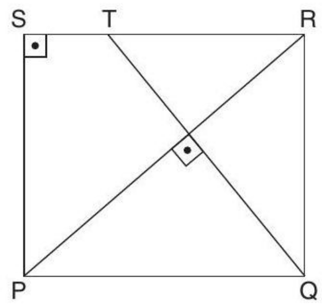
Questão 06
Considere um hexágono regular ABCDEF de lado 1 em que foram traçados os triângulos ACE e BDF, conforme a figura a seguir:



Qual é a área do hexágono cujos vértices são as interseções dos lados desses dois triângulos?

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $2\sqrt{3}$

Questão 07
No retângulo PQRS a seguir, o ponto T divide o segmento RS de modo que RT tem o dobro da medida de TS e o segmento QT é perpendicular à diagonal PR.



Sendo assim, qual o valor da razão $\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(C) $\sqrt{5}$

(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Questão 08
Na sequência de Fibonacci, cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Sendo assim, qual é o resto da divisão por 8 do 2019º termo dessa sequência?

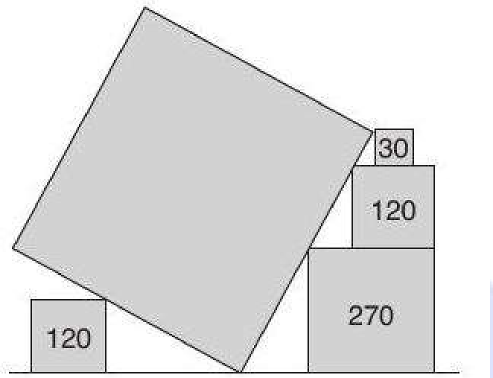
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 5

Questão 09
Em uma progressão aritmética cujos termos são todos distintos, a soma dos dez primeiros termos é igual a 50. Além disso, o primeiro, o nono e o quinto termos, nessa ordem, são três termos consecutivos de uma progressão geométrica. A razão da progressão aritmética em questão é

(A) 6 (B) 3 (C) 0 (D) 1 (E) 5

Questão 10

Uma obra de arte é composta de cinco telas de formato quadrado, posicionadas sobre um mesmo plano ortogonal ao plano horizontal do solo. O número que aparece em uma tela representa a sua respectiva área, medida em decímetro quadrado. Sabe-se que a tela de maior área tem um vértice em contato com o solo e outro vértice em contato com um dos vértices da tela de menor área. Além disso, a tela de maior área também tem pontos de contato com vértices das outras três telas, conforme mostra a figura a seguir.



A área da maior dessas telas é igual a

(A) 810 dm².

(B) 1350 dm².

(C) 864 dm².

(D) 1440 dm².

(E) 1080 dm².

Questão 11

Na tabela apresentada a seguir, com 4 linhas e 4 colunas, ao lado de cada linha e embaixo de cada coluna estão as respectivas somas dos elementos tabelados.

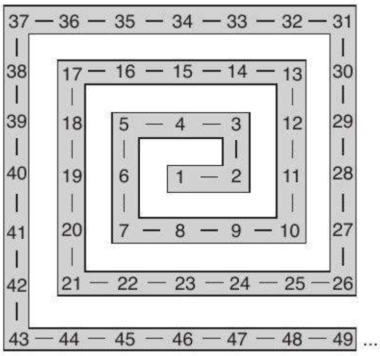
A	C	A	C	8
D	A	A	C	S_1
D	A	A	B	−2
C	B	B	D	S_3
0	S_2	1	S_4	

Sabendo que A, B, C e D são números reais, qual é o valor da expressão $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$?

(A) 5 (B) 1 (C) -1 (D) -5 (E) 7

Questão 12

A espiral numérica mostrada a seguir apresenta um padrão geométrico em que os números naturais, a partir do 1, são escritos de modo a formar uma "sequência de quadrados".



Nesse padrão, considere a sequência de quadrados obtida de modo que o maior número de cada quadrado esteja sempre situado no vértice inferior da direita, sem perder o formato espiral. Assim, o primeiro termo é formado por 9 números (1 a 9); o segundo, por 25 (1 a 25); o terceiro, por 49 (1 a 49); o quarto termo, por 81 (1 a 81); e assim sucessivamente. Na sequência em questão, o quadrado formado por 1225 números é o

(A) 17º termo (B) 18º termo (C) 34º termo

(D) 35º termo (E) 36º termo

Questão 13

Considere a expressão mostrada a seguir, em que x e y são números reais tais que $x^2 \neq y^2$

O valor da expressão

$$\frac{(x^2 - y^2)}{x^3 + x^2y - xy^2 - y^3}$$

é equivalente a:

(A) $\frac{x+y}{x^2+y^2+3xy}$ (B) $\frac{x-y}{(x-y)^2+xy}$ (C) $\frac{x+y}{x^2+y^2+x}$

(D) $\frac{1}{x-y}$ (E) $\frac{1}{x+y}$

Questão 14
Calcule o valor de $\sqrt{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 + 1}$

(A) 849 (B) 859 (C) 869 (D) 879 (E) 789

Questão 15
Encontre a soma de todos os inteiros positivos n tal que $n^2 - 19n + 99$ é um quadrado perfeito

(A) 1 (B) 19 (C) 29 (D) 38 (E) 48

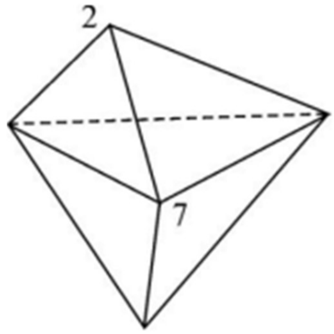
Questão 16
Dada a equação $x + \frac{1}{x} = \sqrt{13}$, onde x é número real. Então, qual é o valor de $\frac{x^{11}+x^7+x^5+x}{x^7+x^5}$?

(A) 110 (B) 109 (C) 108 (D) 107 (E) 106

Questão 17
Ambas as raízes da equação quadrática $x^2 - 63x + k = 0$ são números primos. O número de valores possíveis de k é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) mais que quatro

Questão 18
O sólido abaixo tem seis faces triangulares e um número escrito em cada vértice, dois dos quais mostrados na figura. A soma dos números escritos nos vértices de cada face é a mesma para todas as faces. Qual é a soma de todos os cinco números escritos nos vértices?



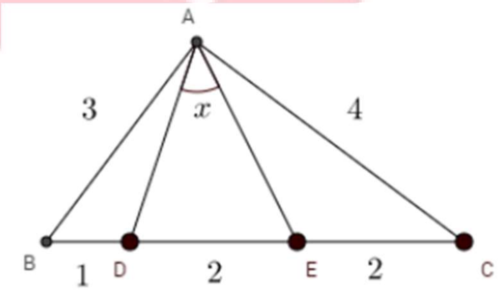
(A) 11 (B) 20 (C) 25 (D) 28 (E) 33

Questão 19
Determine o valor da expressão

$$\frac{2015^3 - 1}{1 + 2015^2 + 2016^2}$$

(A) 1006 (B) 1007 (C) 1008 (D) 2014 (E) 2015

Questão 20
Considere o triângulo ABC a seguir tal que $AB = 3$, $AC = 4$ e $BC = 5$. Sobre o lado BC, são marcados os pontos D e E de modo que $BD = 1$, $DE = 2$ e $EC = 2$. Determine a medida do ângulo $< DAE$.



(A) 30º (B) 35º (C) 40º (D) 45º (E) 50º

Questão 21
Pedroso tem pilhas com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 11 pedras (sim, ele não tem uma pilha com 10 pedras). Ele pode juntar duas pilhas de pedras. Quantas vezes, no mínimo, ele deve fazer essa operação para ter pilhas com as mesmas quantidades de pedras?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) 8

Questão 22
Seja $P(n)$ a soma dos algarismos pares do número n. Por exemplo, $P(1234) = 2 + 4 = 6$. Qual o valor de $P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(100)$?

(A) 200 (B) 360 (C) 400 (D) 900 (E) 2250

Questão 23
Sejam a, b, c, d números inteiros tais que

$$a < 2b, b < 3c, c < 4d$$

Se $d < 40$, o maior valor possível de a será:

(A) 960 (B) 959 (C) 951 (D) 934 (E) 927

Questão 24
O grupo A da Copa do Mundo de Futebol terminou com os seguintes resultados:

Equipe	Número de Pontos
Áustria	7
Brasil	5
Camarões	4
Dinamarca	0

Sabe-se que Áustria e Camarões levaram apenas 1 gol, cada um. Além disso, Brasil e Dinamarca marcaram apenas 1 gol, cada um, enquanto que Áustria marcou 3 gols. Qual o resultado da partida Áustria × Dinamarca?

Observação: no grupo, cada seleção joga com as demais exatamente uma vez e, em cada partida, o time vencedor ganha 3 pontos, o perdedor não ganha nem perde pontos e, em caso de empate, cada time ganha 1 ponto.

(A) 1 x 0 (B) 2 x 1 (C) 2 x 0 (D) 0 x 0

Questão 25
Quantos números inteiros positivos menores que 500 têm exatamente 15 divisores inteiros positivos?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

RASCUNHO

Gabarito Turma ITA - 2023

QUESTÃO	
1	B
2	C
3	B
4	C
5	A
6	B
7	E
8	C
9	A
10	B
11	D
12	A
13	E
14	C
15	D
16	A
17	B
18	C
19	B
20	D
21	D
22	C
23	E
24	B
25	C